



UNIVERSITÀ CA' FOSCARI DI VENEZIA  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA APPLICATA

Diana Barro

**Un'introduzione ai modelli di rischio  
di credito per portafogli finanziari**

n. 124/2004

# 1 Introduzione

La misurazione e la gestione del rischio di credito hanno assunto negli ultimi anni sempre maggiore rilevanza nel processo di gestione del rischio per le istituzioni finanziarie.

Tradizionalmente con rischio di credito si intendono due diversi tipi di rischio: il rischio di controparte e il rischio di emittente.

Il rischio di controparte, rilevante principalmente nel caso di contratti derivati e di prestiti, si caratterizza per essere associato molto spesso a posizioni scarsamente liquide e viene in genere valutato su un orizzonte temporale di medio/lungo periodo. Il rischio legato all'emittente riguarda, come la cronaca recente ha avuto modo di sottolineare anche in Italia, principalmente i titoli obbligazionari, in genere considerati strumenti finanziari liquidi per i quali esistono mercati regolamentati. Questo permette di condurre analisi su orizzonti temporali di breve o brevissimo periodo.

Il rischio di credito ha origine dalla potenziale variazione del merito creditizio di una controparte che si concretizza in una diminuzione di valore della posizione. Possiamo individuare due componenti principali: il rischio di default (*default risk*) e il rischio di deterioramento del merito creditizio (*credit spread risk*).

Il verificarsi dell'evento default determina una perdita immediata del valore della posizione. Tale perdita può essere totale o parziale a seconda che siano o meno previste delle garanzie collaterali o un tasso di recupero (*recovery rate*). Il verificarsi di un deterioramento del merito creditizio della controparte agisce invece in modo diverso sul valore della posizione a seconda che questa sia o meno marked-to-market. Nel primo caso il downgrade determina una perdita immediata registrata sotto forma di diminuzione del valore della posizione, nel secondo caso il valore contabile della posizione rimane invariato e la perdita si realizza solo nel momento in cui avviene il default. Tipici esempi di posizioni non marked-to-marked sono i portafogli di prestiti.

L'analisi del rischio di credito può essere condotta a diversi livelli di aggregazione:

- per singola transazione;
- per controparte (aggregando le transazioni relative alla medesima controparte);
- a livello di portafoglio (aggregando più posizioni relative a diverse controparti).

In figura 1 sono rappresentati i tre diversi livelli di aggregazione e sono posti in evidenza gli elementi critici nel passaggio da ciascun livello al successivo.

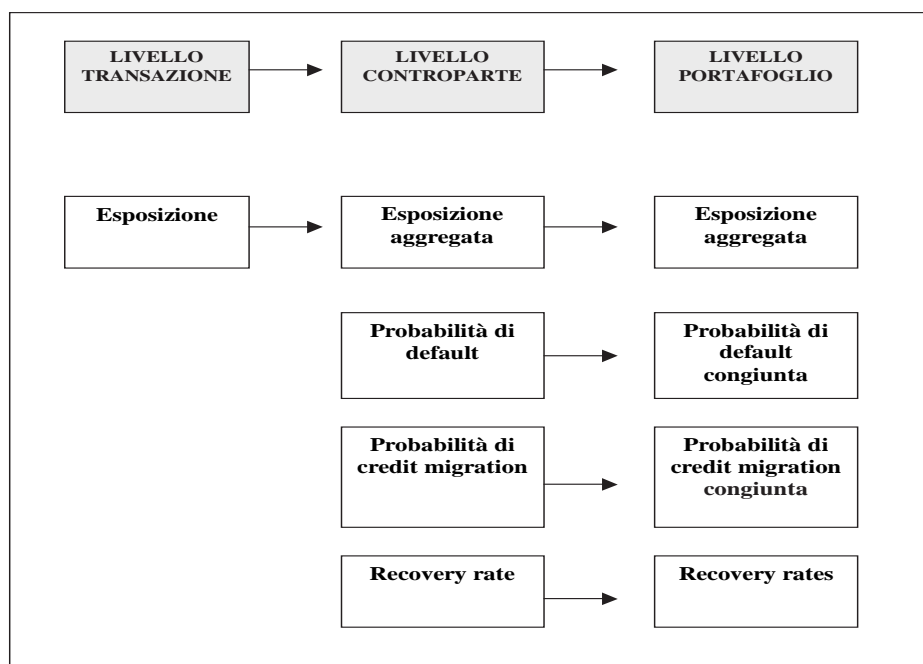


Figura 1: Livelli di aggregazione per la valutazione del rischio di credito. Fonte: A. Arvanitis, J. Gregory, *Credit, Risk Books*, Risk Waters Group Ltd 2001.

La principale difficoltà nel passare dalla valutazione del rischio di credito per una controparte alla valutazione per un portafoglio di crediti è data dalla necessità di stimare le probabilità di default o di credit migration congiuntamente per tutte le posizioni in portafoglio, tenendo conto di tutte le interrelazioni.

I dati storici mostrano come i tassi di default cambino in modo sostanziale nel corso del tempo. La descrizione di tali fenomeni può seguire, dal punto di vista modellistico, due possibili approcci.

- Le probabilità di default sono supposte grandezze aleatorie che possono dipendere sia dalla natura della controparte che dallo stato dell'economia. La correlazione tra le probabilità di default può essere introdotta direttamente come correlazione tra le variabili casuali che le descrivono.
- Le probabilità di default sono considerate funzioni delle caratteristiche di ciascuna controparte e dipendono da alcuni fattori comuni a tutte le controparti che sono tra

loro correlati. La correlazione tra le probabilità di default deriva quindi direttamente dalla correlazione tra i fattori sottostanti.

Mentre il primo approccio mira alla modellizzazione delle probabilità di default, il secondo ha come obiettivo un modello che descriva gli eventi di default. Entrambi gli approcci sono stati sviluppati da un punto di vista teorico e hanno trovato applicazioni empiriche.

## 2 Aspetto regolamentare: gli accordi di Basilea

L'esigenza di giungere ad una regolamentazione comune del sistema bancario ed in particolare negli aspetti di misurazione e gestione del rischio ha portato alla creazione di un'organizzazione internazionale, nota con il nome di Comitato di Basilea, che opera per promuovere la cooperazione tra le banche centrali e altri organismi o autorità equivalenti sui temi della stabilità monetaria e finanziaria.

Il Comitato, fondato alla fine del 1974 dai Governatori delle banche centrali dei Paesi del G10 e dalla Svizzera, opera sotto il patrocinio della BIS (Bank of International Settlements); le indicazioni e gli standard proposti non hanno valore legale ma rappresentano delle raccomandazioni e delle linee guida la cui attuazione è affidata alle autorità di vigilanza nazionali.

Nel 1988 è stato proposto il primo accordo di Basilea sul Capitale, divenuto presto lo standard per la determinazione dei requisiti patrimoniali per le banche di grandi dimensioni che operano a livello internazionale. L'obiettivo raggiunto da tale accordo è la determinazione di una comune misura di adeguatezza patrimoniale. Il criterio proposto è quello dell'8%, in base al quale una banca deve detenere un capitale pari almeno all'8% del totale delle attività pesate.

Più in dettaglio, il capitale regolamentare,  $RC$ , è determinabile come segue

$$RC = 8\% \times RWA$$
$$RWA = \sum_i rw_i \times ce_i$$

dove

- $RWA$  = Attività pesate per il rischio (risk-weighted assets);
- $rw_i$  = coeff. di rischio per la categoria  $i$ -esima;

- $ce_i$  =esposizione creditizia nella categoria  $i$ -esima.

In questo approccio non vi è distinzione sul diverso merito creditizio delle controparti, che sono suddivise solo per categorie (Corporate, Retail, Government ecc.).

Nel nuovo accordo, noto come Basilea 2, che si prevede entrerà a regime a partire dal 2007, viene introdotto il criterio del merito creditizio (*rating*) per la classificazione delle attività e la conseguente determinazione di un peso da assegnare nel calcolo del capitale regolamentare. Sono previsti due approcci possibili: il metodo standard e l'approccio internal-ratings-based (IRB).

Nel caso del metodo standard, che rappresenta il livello minimo obbligatorio, le banche sono tenute a suddividere le loro esposizioni in categorie prudenziali secondo le caratteristiche dominanti e ad ogni categoria sono assegnate delle ponderazioni fisse.

Nell'approccio internal-ratings-based le banche possono utilizzare un sistema di valutazione dei ratings interno, soggetto comunque a limiti e all'approvazione dell'autorità di vigilanza. In particolare, il sistema di ratings interno deve essere operativo da almeno 3 anni e deve corrispondere ai sistemi di rating considerati come benchmark per quanto riguarda la probabilità di default ad un anno. In questo approccio le ponderazioni da attribuire a ciascuna posizione dipendono solo dal merito creditizio.

La nuova metodologia di calcolo delle ponderazioni per le attività è volta a fornire una più accurata valutazione della rischiosità e conseguentemente una più efficace determinazione dei requisiti patrimoniali. Le categorie di rischio oggetto di analisi sono il rischio di mercato, il rischio di credito ed il rischio operativo.

Tra i principali problemi aperti nella valutazione delle metodologie esistenti, al fine di un loro riconoscimento per la determinazione del capitale regolamentare, da parte del Comitato di Basilea, vi è la scarsità di dati per l'implementazione di tali modelli e la necessità di effettuare un processo di validazione del modello.

### **3 Rischio di credito per una posizione creditizia**

Il rischio di credito rappresenta il rischio che un evento inatteso, relativo alla capacità di rimborso o al merito creditizio di una controparte, faccia variare il valore della posizione creditizia.

Nella valutazione del rischio di credito possiamo distinguere tra approccio *default mode*, che considera solamente il verificarsi dell'insolvenza, e *approccio multistato* in cui anche il

deterioramento del merito creditizio della controparte rappresenta una fonte di rischio di credito.

Il primo approccio prevede per una posizione creditizia due stati possibili: default o non default. Il verificarsi dell'evento default è determinato esclusivamente dalla probabilità di default della variabile binaria associata.

L'approccio multistato considera il rischio di migrazione, che si configura come il rischio che il valore di una posizione subisca una variazione a causa di un deterioramento del merito creditizio della controparte. Lo stato di default rappresenta uno dei possibili stati e la migrazione in tale stato coincide con l'evento insolvenza.

Lo strumento fondamentale su cui si basa l'approccio multistato è la matrice di transizione, che può essere stimata sulla base delle osservazioni storiche ed è fornita dalle agenzie di rating.

Nel seguito richiamiamo brevemente gli elementi fondamentali nella determinazione della perdita associata ad una singola posizione; per una trattazione dettagliata si vedano, tra gli altri, [15][3][9].

La perdita associata alla posizione  $i$ -esima è definita come segue

$$\tilde{L}_i = EAD_i \cdot LGD_i \cdot L_i,$$

dove indichiamo rispettivamente con

- $\tilde{L}_i$  la perdita associata alla posizione;
- $EAD_i$  l'esposizione in caso di insolvenza (*Exposure At Default*);
- $LGD_i$  il tasso di perdita in caso di insolvenza (*Loss Given Default*);
- $L_i = \mathbb{I}_{D_i}(\omega)$  la funzione indicatrice dell'evento default ( $D_i$ ) con riferimento ad un prefissato orizzonte temporale (in genere un anno);
- $P(D_i) = p_i$  la probabilità di insolvenza.

Analizziamo di seguito in maggiore dettaglio i singoli elementi. Nel caso di prestiti bancari l'esposizione in caso di insolvenza consiste di due parti: il credito già utilizzato e la parte resa disponibile ma non ancora utilizzata. Quest'ultima componente introduce un elemento di aleatorietà nella determinazione dell'esposizione effettiva.

Una volta noto il tasso di recupero (*recovery rate*,  $rr$ ), il tasso di perdita in caso di insolvenza è determinato come  $(1 - rr)$ . Alcune analisi empiriche condotte sui dati storici

hanno evidenziato come il tasso di recupero possa variare sostanzialmente sulla base delle garanzie associate alla singola posizione, si veda ad esempio [9].

La determinazione delle probabilità di default dipende dall'approccio seguito, default mode o approccio multistato. Nel primo caso l'evento default è una variabile casuale binaria, mentre nel secondo caso la probabilità di default può essere calcolata a partire dalle matrici di transizione di rating.

La determinazione della perdita attesa richiede la specificazione della natura e delle relazioni esistenti tra le grandezze coinvolte. Di seguito sono riportate due tra le ipotesi usuali

- $EAD_i$  e  $LGD_i$  sono supposte deterministiche e costanti nel tempo;
- $EAD_i$  e  $LGD_i$  sono considerate variabili aleatorie indipendenti tra loro e da  $D_i$ .

Sotto ciascuna di queste due ipotesi alternative possiamo scrivere la perdita attesa come

$$E\tilde{L}_i = EAD_i \cdot LGD_i \cdot p_i,$$

dove, nel caso della seconda ipotesi,  $EAD_i$  e  $LGD_i$  sono da intendersi come valori medi delle corrispondenti variabili aleatorie.

Sotto le medesime ipotesi possiamo determinare la perdita inattesa in una posizione come una misura della variabilità della perdita rispetto al suo valore atteso

$$UL_i = \sqrt{Var(\tilde{L}_i)} = \sqrt{Var(EAD_i \cdot LGD_i \cdot L_i)}.$$

Da un punto di vista modellistico possiamo distinguere due approcci fondamentali nello studio del rischio di credito:

- l'approccio strutturale (modelli sul valore dell'azienda);
- l'approccio intensity-based (modelli in forma ridotta);
- approccio credit spread.

I modelli in forma strutturale si fondano sulla modellizzazione del valore dell'azienda. In questa classe di modelli l'evento default è determinato dall'evoluzione temporale dell'attivo

dell'azienda in relazione alla struttura delle passività . Il modello di riferimento è il modello di Merton [22], poi rivisto da Vasicek [26].

La principale difficoltà associata all'utilizzo di tali modelli riguarda la stima dei parametri del processo che descrive l'evoluzione del valore dell'azienda. Si tratta infatti di grandezze che non sono direttamente osservabili. I modelli strutturali hanno trovato applicazione negli approcci di CreditMetrics e KMV.

In questa classe di modelli l'evento default è spiegato nel contesto economico e/o finanziario in cui origina.

Nei modelli in forma ridotta, invece, l'evento di default è modellizzato a prescindere dalla struttura finanziaria dell'azienda, introducendo delle ipotesi sulla forma funzionale dell'intensità di default.

## 4 Rischio di credito per un portafoglio

La valutazione del rischio di credito per un portafoglio richiede la preliminare valutazione di ciascuna posizione e l'analisi della dipendenza nei default tra posizioni.

Nella realtà operativa i portafogli sono costituiti da un numero ingente di posizioni, tale da rendere impossibile una valutazione singola. Un'ipotesi usuale è quella di costruire insiemi di posizioni omogenee per merito creditizio e assumere che tutte le controparti in una data classe di rating siano caratterizzate dalla medesima probabilità di default, in modo indipendente dal paese, dal settore di appartenenza o dalla dimensione. L'analisi di correlazione viene quindi condotta tra classi di rating.

La perdita su un portafoglio può essere determinata sommando le perdite registrate sulle singole posizioni

$$\tilde{L}_P = \sum_{i=1}^M \tilde{L}_i = \sum_{i=1}^M (EAD_i \cdot LGD_i \cdot L_i).$$

A partire da tale definizione possiamo determinare la perdita attesa come

$$E\{\tilde{L}_P\} = E\left\{\sum_{i=1}^M \tilde{L}_i\right\} = E\left\{\sum_{i=1}^M (EAD_i \cdot LGD_i \cdot L_i)\right\}.$$

Una misura della variabilità della perdita rispetto al suo valore atteso è data dalla perdita inattesa

$$\begin{aligned}
UL_P &= \sqrt{Var(\tilde{L}_P)} = \sqrt{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M Cov(\tilde{L}_i; \tilde{L}_j)} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M Cov(EAD_i \cdot LGD_i \cdot L_i; EAD_j \cdot LGD_j \cdot L_j)}.
\end{aligned}$$

Il rischio associato ad un portafoglio di crediti dipende in modo cruciale dalla correlazione tra le posizioni. La presenza di una correlazione positiva implica che il rischio di credito per il portafoglio risulta maggiore della somma dei rischi delle singole componenti.

Sotto alcune ipotesi semplificatrici possiamo ricondurre la determinazione della perdita inattesa al problema di misurare la correlazione esistente tra i default.

In dettaglio assumiamo:

- $EAD_i$  costante;
- $LGD_i$  costante, ad esempio posto pari al valore medio ( $\overline{LGD}_i$ );

e indichiamo con  $\rho_{ij} = Corr(L_i, L_j)$  coefficiente di correlazione dell'evento default per le controparti  $i$  e  $j$ .

La perdita inattesa può quindi essere espressa come

$$UL_P = \sqrt{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M EAD_i EAD_j \overline{LGD}_i \overline{LGD}_j Cov(L_i; L_j)}.$$

Risulta evidente come una corretta misurazione della dipendenza tra gli eventi di default sia determinante nella misurazione del rischio di credito per un portafoglio.

Uno tra gli obiettivi prioritari nella valutazione del rischio di credito per un portafoglio finanziario è la determinazione del Capitale Economico (Capital at Risk o Credit-VaR)

$$EC_\alpha = q_\alpha - E\{\tilde{L}_P\}, \tag{1}$$

dove  $q_\alpha = \inf \{q > 0 | P(\tilde{L}_P \leq q) \geq \alpha\}$  rappresenta il quantile di ordine  $\alpha$  della distribuzione di perdita.

Per un fissato livello di confidenza il capitale economico è definito come la differenza tra l' $\alpha$ -quantile della distribuzione di perdita per il portafoglio e la perdita attesa. Nella pratica

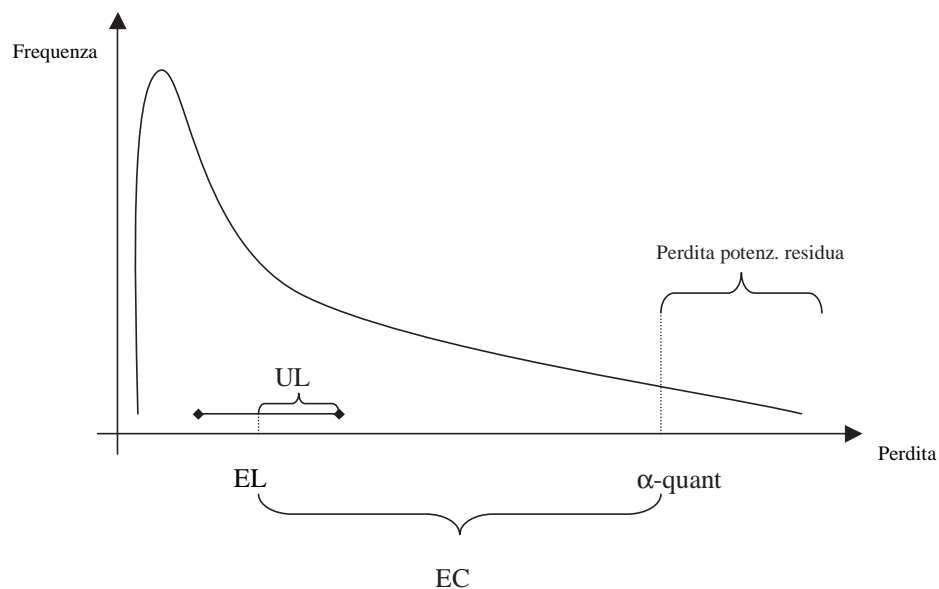


Figura 2: Distribuzione di perdita per un portafoglio e determinazione del capitale economico.

della determinazione del capitale richiesto, infatti, si tende a separare l'effetto derivante da una perdita attesa da quello riguardante una perdita non attesa.

In figura 2 è illustrato graficamente il calcolo del capitale economico. La distribuzione di perdita del portafoglio rappresentata mostra le caratteristiche tipiche di tali distribuzioni: marcata asimmetria e leptocurtosi.

Fissato un orizzonte temporale di ampiezza  $T$ , la distribuzione di perdita fornisce la probabilità di incorrere in una perdita di qualsiasi entità entro l'orizzonte dato.

Nel processo di gestione del rischio di credito per un portafoglio la caratterizzazione della distribuzione di perdita riveste un ruolo chiave non solo nel calcolo dei requisiti patrimoniali ma anche nella gestione attiva del rischio di credito e nell'analisi del contributo marginale di ciascuna posizione. La conoscenza della distribuzione di perdita permette inoltre di effettuare analisi di sensitività e può essere utilizzata nell'ottimizzazione di portafoglio.

Come già sottolineato in precedenza, un elemento chiave nell'analisi a livello di portafoglio è la dipendenza tra le posizioni, non solo per quanto concerne la dipendenza tra i default, ma anche per quanto riguarda la dipendenza tra variazioni del merito creditizio. Un secondo aspetto di notevole rilievo riguarda l'analisi della concentrazione del portafoglio ed

in particolare l'individuazione degli elementi che determinano la concentrazione di rischio (es. paese, settore, ...).

L'analisi dei dati storici mediante i tradizionali metodi per lo studio delle serie storiche risulta spesso inefficace a causa dalla scarsità e della scarsa qualità dei dati disponibili. Il verificarsi di un'insolvenza rappresenta (o dovrebbe rappresentare), infatti, un evento raro. Alcuni strumenti quantitativi utilizzati nella teoria delle assicurazioni risultano particolarmente utili ed in particolare la teoria statistica dei valori estremi (*Extreme Value Theory*) e i concetti di dipendenza non lineare che vanno oltre la correlazione (funzioni copula). Per un'introduzione a tali problematiche si veda ad esempio [7], [10] e [12].

La determinazione del Credit-VaR presenta alcuni problemi di rilievo, non affrontabili esclusivamente con gli strumenti sviluppati per l'analisi del rischio di mercato (market VaR). In particolare la distribuzione di perdita per un portafoglio risulta estremamente asimmetrica e leptocurtica e la misurazione della diversificazione, in termini di rischio di credito, è molto più complessa.

In generale non è possibile ricavare un'espressione analitica per la distribuzione di perdita di un portafoglio, se non sotto ipotesi molto restrittive.

Due approcci possibili per lo studio di tale distribuzione di perdita sono la simulazione Monte Carlo e la scelta di un'approssimazione analitica.

## 4.1 Simulazione Monte Carlo

Nell'approccio basato sulla simulazione Monte Carlo, le perdite di portafoglio vengono simulate al fine di costruire la distribuzione empirica di perdita sotto forma di istogramma delle frequenze.

Indichiamo con  $\tilde{L}_P^{(1)}, \dots, \tilde{L}_P^{(n)}$ ,  $n$  potenziali perdite di portafoglio ottenute mediante simulazione, sulla base delle distribuzioni di perdita delle singole posizioni e delle loro correlazioni.

La distribuzione empirica delle perdite di portafoglio è data da

$$F(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{[0,x]}(\tilde{L}_P^{(j)}).$$

Tutte le grandezze di interesse per il portafoglio possono essere agevolmente calcolate a partire dalla distribuzione empirica.

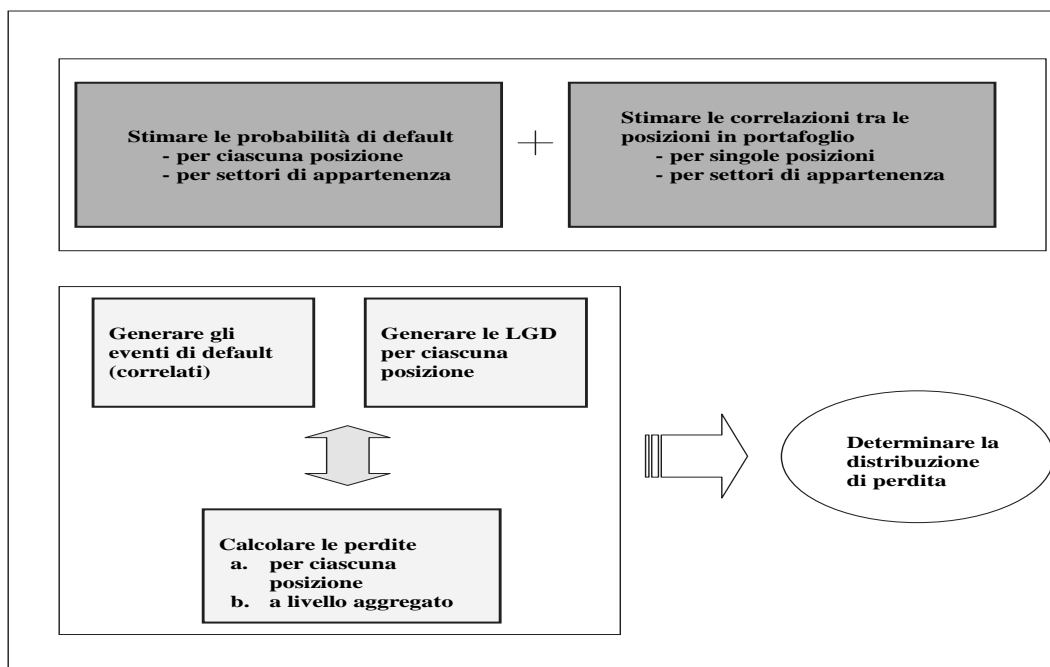


Figura 3: Schema per la simulazione della distribuzione di perdita di un portafoglio.

Tra i principali limiti di tale approccio deve essere annoverato il problema della complessità computazionale associato ad un uso intensivo della simulazione.

Per superare tale problema possono essere applicate le tecniche di accelerazione della convergenza abitualmente utilizzate nelle applicazioni dei metodi di simulazione Monte Carlo (quali, ad esempio, le variabili antitetiche, l'importance sampling ecc.).

La principale questione inerente la simulazione di eventi di default riguarda la difficoltà di simulare eventi correlati.

In figura 3 è rappresentato lo schema generale per la simulazione della distribuzione di perdita di un portafoglio. In figura 4 è presentato un esempio di distribuzione empirica ottenuta simulando le perdite per un portafoglio composto da 25 controparti. L'approccio utilizzato è di tipo intensity-based, si veda ad esempio [15].

L'approccio presentato riguarda la determinazione della distribuzione di perdita con riferimento ad un assegnato orizzonte temporale. Nel passaggio da tale approccio, che possiamo definire statico, ad una visione multiperiodale che ponga l'accento sull'evoluzione della distribuzione di perdita, assume particolare rilievo l'introduzione di recovery rate

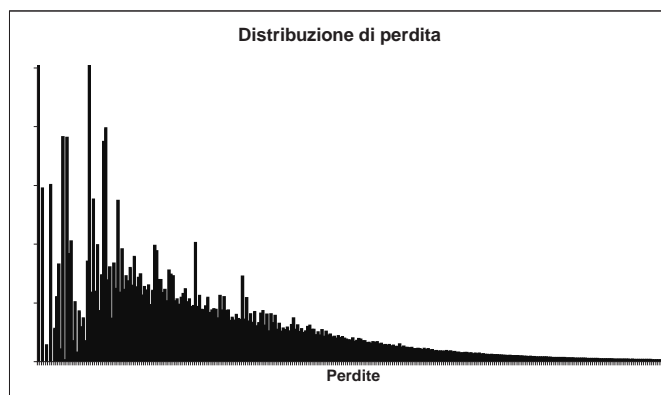


Figura 4: Simulazione della distribuzione di perdita per un portafoglio con 25 controparti (approccio *intensity-based*).

stocastici e la possibilità di osservare credit migrations.

## 4.2 Approssimazione analitica

Lo scopo in questo approccio è quello di approssimare la distribuzione di perdita del portafoglio reale, non nota, mediante una distribuzione di perdita nota di un portafoglio considerato equivalente.

A tale scopo si considera un portafoglio di crediti equivalente a quello reale ma con distribuzione di probabilità nota.

Le principali fasi di applicazione di tale approccio possono essere riassunte come segue:

- scelta (arbitraria) di una famiglia di distribuzioni sufficientemente flessibile che presenti caratteristiche tipiche di una distribuzione di perdita (asimmetria e code spesse);
- determinazione, a partire dalle caratteristiche del portafoglio originario, della perdita attesa e della perdita inattesa,  $EL$  e  $UL$ , rispettivamente media e varianza della distribuzione di perdita, determinazione eventualmente anche di alcuni momenti di ordine superiore;
- individuazione di una distribuzione specifica tra quelle della famiglia scelta, mediante procedura di *moment matching*.

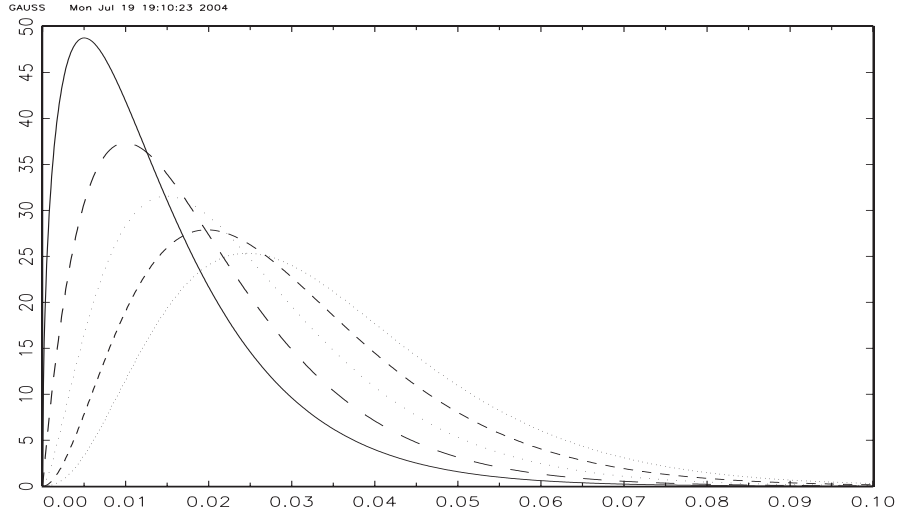


Figura 5: Distribuzione Beta al variare del parametro  $a$ .

Tale approccio introduce un consistente elemento di rischio di modello, in particolare per quanto riguarda le code della distribuzione.

Una famiglia di distribuzioni molto utilizzata nella pratica è la distribuzione Beta la cui funzione di densità di probabilità è

$$\mathcal{B}e_{a,b}(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \mathbb{I}_{[0,1]}(x).$$

dove con  $\Gamma(\cdot)$  indichiamo la funzione Gamma.

Per tale famiglia di distribuzioni si ha

- $E\{x\} = \frac{a}{a+b}$
- $Var\{x\} = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

Nelle figure 5 e 6 sono rappresentate le funzioni di densità di una v.c. Beta al variare rispettivamente del parametro  $a$  e  $b$ .

Le misure di rischio per il portafoglio originario sono quindi calcolate a partire dai quantili della distribuzione Beta.

Il principale limite di tale approccio riguarda il rischio di modello che viene introdotto scegliendo, in modo arbitrario, una famiglia di distribuzioni di riferimento.

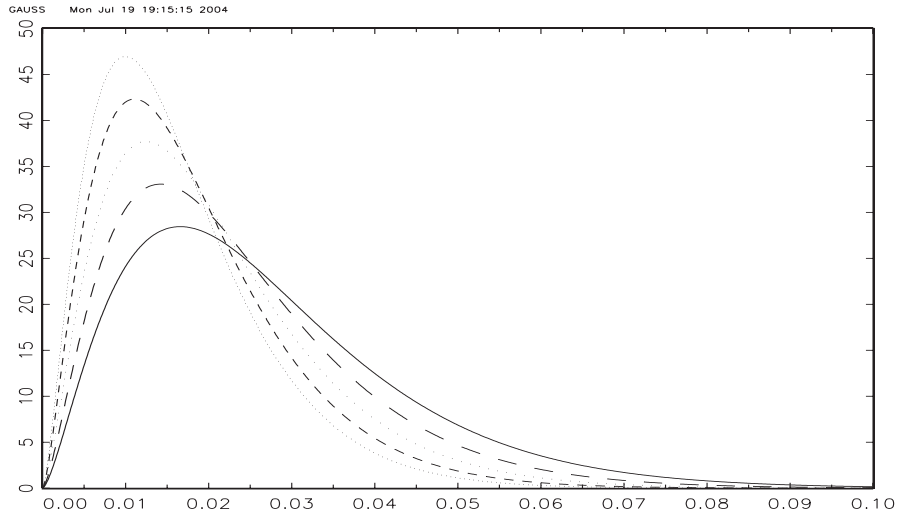


Figura 6: Distribuzione Beta al variare del parametro  $b$ .

## 5 Correlazione tra posizioni in portafoglio

Un elemento fondamentale nel determinare la distribuzione di perdita del portafoglio è la modellizzazione della dipendenza tra le posizioni in portafoglio. In particolare l'interesse riguarda il ruolo della correlazione nella coda inferiore della distribuzione, quella utilizzata per stimare il capitale economico.

Di seguito sono descritti alcuni approcci possibili per la modellizzazione della correlazione:

- modelli fattoriali
- il modello di Bernoulli
- il modello di Poisson.

Consideriamo un portafoglio di crediti composto da  $M$  posizioni, fissiamo, convenzionalmente, un orizzonte di valutazione di 1 anno. Nel seguito considereremo esclusivamente modelli a due stati: default-no default.

## 5.1 Modelli fattoriali

Nei modelli fattoriali la correlazione tra i default è espressa mediante alcuni fattori comuni che influenzano il comportamento di più controparti.

I principali passi per l'applicazione di tali modelli sono riassumibili come segue

- individuazione dei fattori rilevanti;
- determinazione della relazione tra i fattori e le posizioni in portafoglio;
- determinazione della correlazione tra le posizioni a partire dalla correlazione di ciascuna posizione con i fattori rilevanti.

I principali vantaggi derivanti dall'utilizzo di tali modelli sono una diretta interpretabilità economica ed una riduzione della complessità computazionale per la stima delle correlazioni tra i default.

In maggior dettaglio assumiamo che i rendimenti dell'attivo della controparte  $i$ ,  $r_i$ , in corrispondenza dell'orizzonte temporale di interesse possano essere descritti da

$$r_i = \beta_i \Phi_i + \varepsilon_i$$

dove  $\Phi_i$  è un fattore composito;  $\beta_i$  è il coefficiente *beta* della controparte  $i$ , in analogia al modello CAPM (Capital Pricing Asset Model);  $\varepsilon_i$  rappresenta la componente idiosincratca, supposta i.i.d, e  $\varepsilon_i$  e  $\Phi_i$  sono supposti indipendenti.

La varianza di  $r_i$  è data da

$$Var(r_i) = \beta_i^2 Var(\Phi_i) + Var(\varepsilon_i)$$

dove indichiamo con  $Var(\Phi_i)$  la componente di rischio sistematico e con  $Var(\varepsilon_i)$  la componente di rischio specifico.

L'analisi relativa ai fattori può essere condotta a più livelli; il modello KMV utilizza, ad esempio, 3 livelli.

Introducendo un secondo livello, ad esempio, possiamo scomporre il fattore composito rispetto a dei *fattori settore* e *fattori paese*

$$\Phi_i = \sum_k^K \omega_{ik} \Psi_k + \sum_{j=1}^J \omega_{ij} \Psi_j$$

dove

- $\Psi_k$  fattori settore;
- $\Psi_j$  fattori paese;
- $\omega_{ik}$  pesi per i fattori settore della controparte  $i$ , con  $\sum_{k=1}^K \omega_k = 1$ ;
- $\omega_{ij}$  pesi per i fattori paese della controparte  $i$ , con  $\sum_{j=1}^J \omega_j = 1$

L'analisi relativa a ciascun fattore paese e a ciascun fattore settore può essere ulteriormente dettagliata utilizzando, ad esempio, metodologie di Analisi delle Componenti Principali. A partire dalla decomposizione, ottenuta applicando un modello fattoriale, si possono ricavare le correlazioni tra i rendimenti dell'attivo delle controparti a partire dalle correlazioni tra fattori.

## 5.2 Modello di Bernoulli

Si tratta di un modello a due stati, default-no default, in cui l'evento di default può essere adeguatamente descritto mediante delle v.c. di Bernoulli.

Consideriamo un portafoglio di crediti composto da  $M$  posizioni, indichiamo con  $L_i$  l'evento default per la posizione  $i$  e con  $p_i$  la probabilità di tale default. Senza perdita di generalità, assumiamo che l'esposizione su ciascuna posizione sia unitaria e che il recovery rate sia nullo. Indichiamo con  $L_i$  la perdita associata a ciascuna posizione al verificarsi dell'evento default.

Se  $L_i = 1$  la controparte si rivela insolvente, se  $L_i = 0$  gli obblighi contrattuali sono adempiuti.

Consideriamo il vettore di v.c.  $L = (L_1, \dots, L_M)$  in cui si ha

$$L_i \sim B(1, p_i) \quad \text{con} \quad L_i = \begin{cases} 1, & \text{con prob. } p_i; \\ 0, & \text{con prob. } 1 - p_i. \end{cases}$$

Definiamo la variabile *default di portafoglio* come

$$L = \sum_{i=1}^M L_i$$

Ovviamente la distribuzione di  $L$  dipende dalle ipotesi su  $L_i$ .

Consideriamo dapprima il caso  $L_i$  i.i.d., in cui assumiamo che le variabili relative a ciascuna posizione,  $L_i$ , siano indipendenti e che la probabilità di default sia costante,  $p_i = p \quad \forall i = 1, \dots, M$ . Sotto tali ipotesi si ha

$$E\{L\} = \sum_{i=1}^M p = Mp, \quad Var\{L\} = \sum_{i=1}^M p(1-p) = Mp(1-p)$$

e per il teorema del limite centrale la distribuzione della perdita di portafoglio quando  $M \rightarrow \infty$  può essere approssimata con la distribuzione normale.

Si può rimuovere l'ipotesi di identica distribuzione mantenendo l'assunzione di default indipendenti. Abbiamo in questo caso probabilità di default diverse per ciascuna controparte:  $L_i \sim B(1, p_i)$ . Sotto tali ipotesi si ha

$$E\{L\} = \sum_{i=1}^M p_i, \quad Var\{L\} = \sum_{i=1}^M p_i(1-p_i)$$

Infine consideriamo un modello più generale che utilizza una mistura di v.c. di Bernoulli. Assumiamo  $L_i \sim B(1, P_i)$ ,  $\forall i = 1, \dots, M$ , con  $P = (P_1, \dots, P_M) \sim F$  su  $[0, 1]^M$ . Sia abbia inoltre  $L_i|_{P_i=p_i} \sim B(1, p_i)$  con  $(L_i|_{P=p})_{i=1, \dots, M}$  indipendenti, cioè condizionatamente alla realizzazione  $p = (p_1, \dots, p_M)$  le v.c.  $L_1, \dots, L_M$  sono indipendenti.

La distribuzione congiunta delle  $L_i$  è data da

$$Pr(L_1 = l_1, \dots, L_M = l_M) = \int_{[0,1]^M} \prod_{i=1}^M p_i^{l_i} (1-p_i)^{1-l_i} dF(p_1, \dots, p_M)$$

La correlazione tra gli eventi di default è data da

$$Corr(L_i, L_j) = \frac{Cov(P_i, P_j)}{\sqrt{E\{P_i\}(1-E\{P_i\})} \sqrt{E\{P_j\}(1-E\{P_j\})}} \quad (2)$$

È interessante osservare come la struttura di dipendenza tra le perdite del portafoglio sia completamente caratterizzata dalla distribuzione di  $P$ .

Nel caso di portafogli caratterizzati da posizioni omogenee per dimensione e tipologia di rischio (portafogli uniformi) possiamo specificare il risultato visto come segue.

Indichiamo con  $P \sim F$  su  $[0, 1]$  la probabilità di default, costante su tutte le posizioni. Assumiamo inoltre che anche la correlazione tra gli eventi di default sia costante e che si abbia indipendenza, cioè  $L_i \sim B(1, P)$  con  $(L_i|_{P=p})_{i=1, \dots, M}$  i.i.d.

Sotto queste ipotesi di uniformità le variabili di Bernoulli  $L_i$  sono scambiabili<sup>1</sup> e si ha

$$Pr(L_1 = l_1, \dots, L_M = l_M) = \int_{[0,1]} p^k (1-p)^{M-k} dF(p)$$

con  $k = \sum_{i=1}^M l_i$ .

### 5.3 Modelli di Poisson

Consideriamo un portafoglio di crediti composto da  $M$  posizioni e indichiamo con  $L_i$  l'evento default per la posizione  $i$  e con  $p_i$  la probabilità di default per la controparte  $i$ .

Consideriamo il vettore di v.c.  $L = (L_1, \dots, L_M)$  in cui si ha

$$L_i \sim Po(\lambda_i) \quad p_i = Pr(L_i \geq 1)$$

dove con  $Po(\lambda_i)$  indichiamo una distribuzione di Poisson con intensità  $\lambda_i$ .

Uno dei principali limiti di tale modello deriva dal fatto che esso ammette default multipli per una singola controparte. Nella pratica tale aspetto viene spesso ignorato dato che se l'intensità di default è ragionevolmente piccola la probabilità di un numero di default maggiore di uno è trascurabile; si ha infatti

$$p_i = Pr(L_i \geq 2) = 1 - e^{-\lambda_i}(1 + \lambda_i).$$

In analogia a quanto visto nel caso dei modelli di Bernoulli, per la determinazione della distribuzione della perdita di portafoglio,  $L$ , possiamo considerare diversi casi.

Se introduciamo l'ipotesi di indipendenza per le singole perdite in portafoglio,  $L_i \sim Po(\lambda_i)$ , si ha

$$L = \sum_{i=1}^M L_i \sim Po\left(\sum_{i=1}^M \lambda_i\right).$$

Consideriamo di seguito il caso di una mistura di v.c. di Poisson. Assumiamo che per ciascuna posizione in portafoglio si abbia  $L_i \sim Po(\Lambda_i) \quad \forall i = 1, \dots, M$  con

---

<sup>1</sup> $(L_1, \dots, L_n)$  sono v.c. scambiabili se si ha  $(L_1, \dots, L_n) \sim (L_{\pi(1)}, \dots, L_{\pi(n)})$  per tutte le permutazioni  $\pi$ .

$\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_M) \sim F$  su  $[0, \infty)^M$ . Si abbia inoltre  $(L_i |_{\Lambda=\lambda})_{i=1, \dots, M}$  indipendenti, cioè condizionatamente alla realizzazione  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_M)$  le v.c.  $L_1, \dots, L_M$  sono indipendenti.

Sotto tali ipotesi la distribuzione congiunta delle  $L_i$  è data da

$$Pr(L_1 = l_1, \dots, L_M = l_M) = \int_{[0, \infty)^M} e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_M)} \prod_{i=1}^M \frac{\lambda_i^{l_i}}{l_i!} dF(\lambda_1, \dots, \lambda_M).$$

La correlazione dei default è data da

$$Corr(L_i, L_j) = \frac{Cov(\Lambda_i, \Lambda_j)}{\sqrt{Var\{\Lambda_i\} + E\{\Lambda_i\}} \sqrt{Var\{\Lambda_j\} + E\{\Lambda_j\}}} \quad (3)$$

Anche in questo caso si può osservare come la struttura di dipendenza tra le perdite in portafoglio è completamente caratterizzata dalla distribuzione di  $\Lambda$ .

## 5.4 Confronto Poisson-Bernoulli

Per i noti risultati della teoria delle probabilità sappiamo che per valori sufficientemente piccoli di  $M$  e di  $p$  si ha

$$B(M, p) \approx Po(pM).$$

Sotto ipotesi di indipendenza e di probabilità di default costante  $p$ , la perdita di un portafoglio di Bernoulli può quindi essere approssimata da una v.c. Poisson con parametro  $\lambda = Mp$ .

È importante però sottolineare che i due approcci presentano differenze significative nell'ordine di grandezza delle correlazioni che inducono; a tale proposito è sufficiente confrontare le espressioni che determinano la correlazione nei due modelli (2) (3).

## 6 Modelli per il rischio di credito

Si tratta di modelli sviluppati per la misurazione del rischio di credito di un portafoglio. Oltre ad alcuni, ben noti, modelli commercializzati dalle principali società di consulenza, esistono numerosi modelli, sviluppati internamente dalle principali istituzioni finanziarie, che possono essere, almeno in parte, ricondotti a metodologie note.

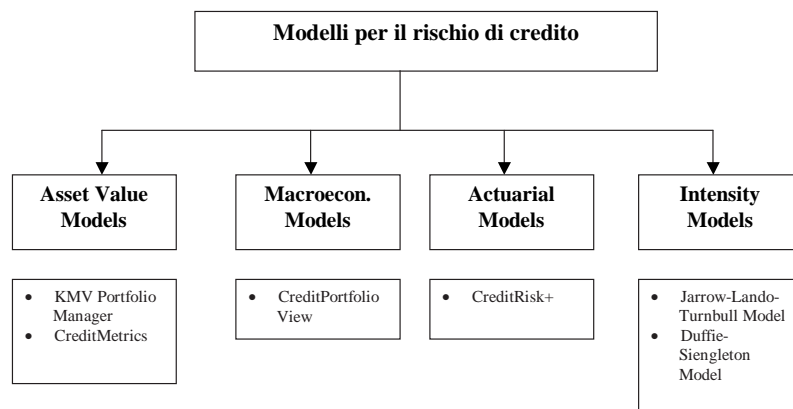


Figura 7: Classificazione sintetica dei principali modelli commerciali per la misurazione del rischio di credito. Fonte: [9].

I principali output per un modello di misurazione del rischio di credito sono la caratterizzazione di una distribuzione di perdita, con riferimento ad un dato orizzonte temporale, per uno strumento o per un portafoglio di posizioni e la determinazione del capitale economico richiesto.

Recentemente sono stati sviluppati e si sono diffusi numerosi modelli per la misurazione del rischio di credito. Le principali metodologie disponibili commercialmente sono

- *CreditMetrics*<sup>TM</sup>
- Metodologia proposta da KMV Co.
- *CreditRisk+*<sup>TM</sup> proposta da Credit Suisse Financial products.
- *CreditPortfolioView*<sup>TM</sup> sviluppata da Tom Wilson e proposta da McKinsey Co.

In figura 7 è presentata una classificazione dei modelli con riferimento alle loro caratteristiche dominanti.

Di seguito sono presentate in modo sintetico le metodologie commerciali esistenti. Per una trattazione più dettagliata si rinvia a [2][3][6] e alla documentazione tecnica che accompagna i modelli, ove disponibile.

Dai risultati di alcuni studi empirici che hanno posto a confronto questi modelli su alcuni portafogli di riferimento emerge che ciascuno di essi può essere ragionevolmente considerato

come modello interno per la misurazione del rischio di credito e la determinazione dei requisiti patrimoniali. La principale limitazione che li accomuna è che tutti i modelli considerati assumono tassi di interesse ed esposizioni deterministici e per tale motivo possono essere correttamente utilizzati solo nel caso di portafogli composti da strumenti finanziari semplici, senza strumenti finanziari derivati.

Tutti questi modelli si caratterizzano inoltre per il fatto di considerare solo il rischio relativo ad un singolo periodo.

## 6.1 CreditMetrics

L'approccio CreditMetrics, sviluppato da JPMorgan e reso pubblico nel 1997, si basa sul concetto di *credit migration*, cioè sulla probabilità di osservare una variazione del merito creditizio della controparte o, in altri termini, sulla probabilità di osservare il passaggio da una categoria di rating ad un'altra, compreso lo stato di default.

L'orizzonte temporale standard di riferimento è un anno. L'approccio proposto da JPMorgan permette di ottenere la distribuzione di perdita, a scadenza, associata ad un portafoglio di prestiti o di titoli obbligazionari. Uno tra i principali limiti del modello deriva dall'ipotesi che i tassi di interesse evolvano in modo deterministico.

Elemento chiave del modello è la specificazione di un sistema di rating e la costruzione della corrispondente matrice di transizione.

Le agenzie di rating, quali ad esempio Standard & Poor's e Moody's, forniscono delle matrici di transizione basate sui dati storici relativi ad oltre 20 anni di osservazioni su aziende di differenti settori.

Nella tabella 1 è riportato un esempio di matrice di transizione secondo le classi di rating di Standard & Poor's. Vi sono 7 categorie di rating, dalla classe più alta AAA alla classe più bassa CCC. L'ultimo stato è il default, che si caratterizza per essere uno stato assorbente in cui cioè la probabilità di uscita è nulla.

Si tratta di valori medi ottenuti aggregando dati talora molto disomogenei. Per questo motivo molte banche utilizzano delle matrici stimate internamente che riflettono maggiormente la composizione del proprio portafoglio di crediti o di obbligazioni.

Un'ulteriore osservazione riguarda l'estrema variabilità nel tempo delle probabilità di default e di credit migration, anche in relazione al ciclo economico. Questo suggerisce un aggiustamento delle probabilità storiche in modo tale da riflettere le condizioni correnti di mercato.

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	90.81	8.33	0.68	0.06	0.12	0.00	0.00	0.00
AA	0.70	90.65	7.79	0.64	0.06	0.14	0.02	0.00
A	0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
BBB	0.02	0.33	5.95	86.93	5.30	1.17	1.12	0.18
BB	0.03	0.14	0.67	7.73	80.53	8.84	1.00	1.06
B	0.00	0.11	0.24	0.43	6.48	83.46	4.07	5.20
CCC	0.22	0.00	0.22	1.30	2.38	11.24	64.86	19.79

Tabella 1: Esempio di una matrice di transizione: probabilità di transizione tra diverse classi di rating ad 1 anno. Fonte: [4]

Il modello assume che all'interno di ciascuna classe di rating tutte le controparti siano omogenee ed in particolare che abbiano le medesime probabilità di default e di transizione. Nel seguito descriviamo brevemente il modello in una versione base.

Il modello, che si basa su un approccio di tipo strutturale alla Merton [22], assume che il valore dell'attivo di una azienda evolva secondo un moto Browniano geometrico la cui dinamica è data da

$$dV_t = \mu V_t dt + \sigma V_t dW_t$$

dove  $W_t$  è un moto Browniano standard.

Il valore dell'attivo al tempo  $t$  è dato da

$$V_t = V_0 \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \sqrt{t} Z_t \right\},$$

dove  $Z_t \sim N(0, 1)$ .

L'evento default ha luogo quando il valore dell'attivo alla scadenza risulta inferiore ad una prefissata soglia,  $V_D$ , da determinarsi a partire dalla struttura del capitale dell'azienda.

La probabilità di default è data da

$$p_D = P[V_t \leq V_D] = P \left[ Z_t \leq \frac{\ln(V_D/V_0) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma \sqrt{t}} \right] = P[Z_t \leq d] = \Phi(d),$$

dove con  $\Phi(\cdot)$  indichiamo la funzione di ripartizione di una variabile casuale normale standardizzata.

Analogamente, l'introduzione di soglie relative a ciascuna classe di rating permette di determinare le probabilità di credit migration da una classe ad un'altra.

Dal punto di vista applicativo il modello assume nota una matrice di transizione che viene utilizzata per determinare le corrispondenti soglie, per ciascuna classe di rating. Per maggiori dettagli si rinvia alla documentazione tecnica [4].

Se consideriamo due controparti con probabilità di default date rispettivamente da  $P1$  e  $P2$  e indichiamo con  $V_{D1}$  e  $V_{D2}$  le corrispondenti soglie di default, la probabilità di default congiunta è data da

$$P(Def1, Def2) = P[V_{1t} \leq V_{D1}, V_{2t} \leq V_{D2}] = P[Z_1 \leq d_1, Z_2 \leq d_2] = \Phi(d_1, d_2, \rho)$$

dove con  $\Phi(d_1, d_2, \rho)$  indichiamo la funzione di ripartizione di una variabile casuale normale bivariata con coefficiente di correlazione  $\rho$ .

La correlazione tra eventi di default svolge un ruolo chiave nella determinazione della distribuzione di perdita di un portafoglio e deve pertanto essere stimata nel modo più accurato possibile.

Si può dimostrare che la correlazione tra eventi di default è data da

$$Corr(Def1, Def2) = \frac{P(Def1, Def2) - P1P2}{\sqrt{P1(1 - P1)P2(1 - P2)}}$$

Poiché la correlazione tra i valori degli attivi non è direttamente osservabile, CreditMetrics propone di utilizzare come proxy, per le aziende quotate in borsa, la correlazione osservabile nel mercato azionario.

Nel caso di portafogli di grandi dimensioni la stima di un matrice di correlazione per tutte le posizioni in portafoglio può risultare comunque problematica dal punto di vista computazionale. L'approccio proposto da CreditMetrics si basa su un'analisi multifattoriale in cui i rendimenti azionari sono descritti utilizzando un numero limitato di fattori tra loro correlati, che determinano la componente di rischio sistematico, e una componente di rischio specifica per ciascuna azienda, assunta indipendente dai fattori e dalle componenti specifiche delle altre aziende. In tal modo la correlazione tra aziende può essere ottenuta direttamente dalla correlazione tra i fattori.

L'obiettivo del modello è la costruzione della distribuzione di perdita a scadenza, per il portafoglio in esame, mediante simulazione Monte Carlo. A partire da tale distribuzione è poi possibile determinare il CreditVar come percentile, al livello di confidenza prefissato, della distribuzione ottenuta.

Di seguito sono brevemente elencati i principali svantaggi di questo approccio.

- Il modello assume omogeneità per tutte le controparti che appartengono alla medesima classe di rating. L'approccio è inoltre basato sulla scelta di un sistema di rating che deve essere fornito esternamente.
- I tassi di recovery sono specificati esogenamente e in genere si assume che seguano una distribuzione di tipo Beta.
- Il modello, basato principalmente sulla simulazione Monte Carlo, risente delle limitazioni dovute alla complessità computazionale.
- CreditMetrics assume inoltre che la probabilità di default attuale sia uguale alla probabilità di default media storica.

## 6.2 KMV

La metodologia proposta da KMV, una società di consulenza specializzata nell'analisi del rischio di credito, permette di determinare le probabilità di default e la distribuzione di perdita del portafoglio con riferimento, sia al rischio di default che al rischio di credit migration. Il modello si basa sul concetto di frequenza di default attesa (*Expected Default Frequency*) in luogo delle frequenze di default storiche fornite dalle agenzie di rating.

Utilizzando un modello alla Merton l'approccio KMV permette di determinare la probabilità di default per ciascuna controparte utilizzando come input la struttura del capitale dell'azienda, la volatilità e il valore corrente dell'attivo. Come per CreditMetrics, il modello proposto da KMV considera i valori osservabili sul mercato azionario come proxy per i valori, non osservabili, dell'attivo dell'azienda e della sua volatilità.

Per una trattazione dettagliata del problema della stima dei parametri dell'attivo dell'azienda e della determinazione della frequenza di default attesa si rinvia alla documentazione tecnica [20][19].

Come nel modello proposto da JPMorgan, anche nell'approccio KMV la correlazione tra gli attivi delle aziende è ricavata a partire da un modello multifattoriale. Di seguito è presentato in maggior dettaglio un modello multifattoriale a più livelli.

La correlazione tra i default è espressa mediante alcuni fattori che influenzano il comportamento di più controparti. I passaggi rilevanti per la specificazione di un modello multifattoriale possono essere riassunti come segue

- individuazione dei fattori rilevanti;
- determinazione della relazione tra i fattori e le singole controparti.

La correlazione tra controparti può essere quindi ottenuta direttamente dalla correlazione tra i fattori rilevanti.

I principali vantaggi di questo approccio derivano da una consistente riduzione della complessità computazionale associata alla determinazione delle correlazioni tra i default e da una agevole interpretabilità economica del modello.

Diversamente da CreditMetrics, l'approccio KMV non simula l'intera distribuzione di perdita a scadenza ma utilizza un'approssimazione analitica. Nel caso di portafogli di grandi dimensioni questo permette di ridurre il peso computazionale del modello.

Sotto alcune ipotesi semplificatrici, in particolare se si assume che il portafoglio sia ben diversificato, si può dimostrare che la distribuzione limite per le perdite di portafoglio è una distribuzione normale inversa. Si tratta di una distribuzione caratterizzata da asimmetria e leptocurtosi, adatta quindi a descrivere le caratteristiche di una distribuzione di perdita.

### 6.3 CreditRisk+

Proposto da Credit Suisse Financial Product nel 1997, l'approccio CreditRisk+ considera esclusivamente il rischio di default.

Il modello ha trovato ampia diffusione tra gli operatori finanziari. La principale ragione di ciò può essere cercata nel fatto che permette di ottenere una distribuzione di perdita esprimibile in forma chiusa, evitando così la complessità computazionale associata ai modelli che utilizzano in modo estensivo la simulazione.

A differenza dei modelli proposti da CreditMetrics e KMV, in questo modello l'evento default non è legato alla struttura del capitale di un'azienda e non vi sono ipotesi sulle cause che possono portare al default.

Il modello si basa su una descrizione probabilistica del default assumendo in particolare che la probabilità di default per un dato orizzonte temporale sia costante nel tempo e che il numero di default osservati in un periodo sia indipendente dal numero di default osservati in ogni altro periodo. Sotto queste ipotesi il modello assume che il numero di default, per un dato orizzonte temporale, possa essere adeguatamente descritto da una distribuzione di Poisson.

Di seguito è presentata una versione base del modello; per maggiori dettagli si rinvia alla documentazione tecnica [5].

Il primo passo per l'applicazione del modello consiste nel raggruppare le posizioni presenti in portafoglio in gruppi omogenei per ammontare di esposizione.

Assumiamo, senza perdita di generalità, che il numero di posizioni in portafoglio coincida con il numero di controparti.

Se indichiamo con  $E$  l'esposizione unitaria presa a riferimento, l'esposizione e la perdita attesa relative al soggetto  $i$ -esimo sono date rispettivamente da

$$v_i = \frac{EAD_i \times LGD_i}{E} \quad \epsilon_i = \frac{EL_i}{E} \quad (4)$$

dove assumiamo che  $LGD_i$  sia deterministico e noto.

Al fine di ridurre la complessità computazionale, il modello non utilizza per ogni posizione l'esposizione esatta ma una sua approssimazione ottenuta arrotondando  $v_i$  all'intero più vicino. Mediante una opportuna scelta dell'unità di misura il numero originario,  $m$ , di posizioni in portafoglio risulta quindi ridotto ad un numero,  $m_E$  di bande omogenee per esposizione. Indicheremo con  $v_{[j]}$  l'esposizione associata alle controparti che appartengono alla classe  $[j]$ , con  $j = 1, \dots, m_E$ . Indichiamo inoltre con  $\mu_j$  il numero atteso di default nella  $j$ -esima banda.

Il passaggio successivo nell'applicazione del modello riguarda la determinazione di una intensità di default comune per ogni banda di esposizione. Brevemente ricordiamo che nel caso di un modello basato sulla distribuzione di Poisson ad ogni controparte  $i$  è assegnata una intensità di default individuale, per un fissato orizzonte temporale di ampiezza  $h$ , pari a  $\lambda_i$ . Tale intensità è legata alla probabilità di default nel corrispondente periodo di ampiezza  $h$ , dalla relazione

$$\lambda_i = -\log(1 - DP_i).$$

Per tenere conto della variabilità nel tempo dei tassi di default, CreditRisk+ propone di considerare il parametro  $\lambda_i$  come una variabile casuale con media  $\bar{\lambda}_i$  e volatilità  $\sigma_{\lambda_i}$ .

Dato un orizzonte temporale di riferimento  $h$ , la probabilità di osservare esattamente  $n$  defaults all'interno del portafoglio, in accordo con la distribuzione di Poisson, è data da

$$P(X = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!},$$

dove  $\lambda$  è il parametro della distribuzione di Poisson e rappresenta il numero medio di default che si verificano in un periodo di ampiezza  $h$ .

Al fine di determinare la distribuzione delle perdite per l'intero portafoglio consideriamo la funzione generatrice di probabilità per ciascuna banda o classe,  $j$ , precedentemente individuata

$$G_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\text{loss} = nE)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n)z^{nv_j}.$$

Dall'ipotesi che il numero di default segua una distribuzione di Poisson deriva

$$G_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu_j} \mu_j^n}{n!} z^{nv_j} = \exp\{-\mu_j + \mu_j z^{v_j}\}.$$

Per l'ipotesi di indipendenza tra le classi in cui è stato suddiviso il portafoglio, la funzione generatrice per la distribuzione di probabilità del portafoglio è data semplicemente dal prodotto delle funzioni generatrici di probabilità delle singole classi

$$G(z) = \prod_{j=1}^m \exp\{-\mu_j + \mu_j z^{v_j}\} = \exp\left\{-\sum_{j=1}^m \mu_j + \sum_{j=1}^m \mu_j z^{v_j}\right\},$$

dove  $\mu = \sum_{j=1}^m \mu_j$  indica il numero di default attesi per l'intero portafoglio.

Data la funzione generatrice possiamo determinare la distribuzione di perdita del portafoglio come

$$P(\text{loss} = nE) = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n G(z)}{dz^n} \right|_{z=0} \quad n = 1, 2, \dots$$

CreditRisk+ ha proposto numerose estensioni al modello base. In tutti i casi, comunque, è possibile ricavare una distribuzione di perdita in forma chiusa e questo rende tale approccio particolarmente interessante e semplice da implementare.

I principali limiti di tale modello derivano dal fatto che non viene considerato il rischio di mercato e sono ignorate le probabilità di credit migration.

## 6.4 CreditPortfolioView

L'approccio CreditPortfolioView è proposto da McKinsey & Company e, come CreditRisk+, considera esclusivamente il rischio di default. Si tratta di un modello multiperiodale a tempo discreto in cui le probabilità di default sono funzione delle variabili macroeconomiche.

Tale approccio è stato sviluppato da McKinsey & Company a partire da due lavori di Wilson [27][28]. Il modello costituisce uno strumento di consulenza nel processo di risk management e la sua formulazione di base viene adattata alle esigenze di ciascun cliente. Il modello si basa sull'osservazione che gli eventi di default e le probabilità di transizione sono soggette a fluttuazioni con riferimento al ciclo economico in quanto in una fase di recessione il numero di default e di downgrades aumenta mentre si osserva il fenomeno opposto in un periodo di crescita. CreditPortfolioView propone un modello che descrive le probabilità di default e di credit migration utilizzando quali fattori esplicativi le variabili macroeconomiche che determinano il ciclo economico.

Le probabilità di default sono modellizzate utilizzando delle funzioni logit in cui la variabile indipendente è rappresentata da un indice che dipende dalle variabili macroeconomiche. In particolare si ha

$$P_{jt} = \frac{1}{1 + e^{-Y_{jt}}},$$

dove  $P_{jt}$  indica la probabilità condizionata di default, al tempo  $t$ , per una controparte nel settore  $j$ ;  $Y_{jt}$  rappresenta il valore dell'indice relativo al settore  $j$ .

L'indice macroeconomico  $Y_{jt}$ , che rappresenta lo stato dell'economia nel settore  $j$ -esimo, è determinato mediante un modello multifattoriale

$$Y_{jt} = \beta_{j0} + \sum_{i=1}^m \beta_{ji} X_{jit} + \nu_{jt},$$

dove  $\beta_j = (\beta_{ji}, i = 1, \dots, m)$  è il vettore dei coefficienti da stimare,  $X_{jt} = (X_{jit}, i = 1, \dots, m)$  sono i valori delle variabili macroeconomiche che determinano l'indice del settore o del paese, i termini di errore  $v_t = (v_{jt}, j = 1, \dots, )$  sono, per ipotesi, indipendenti dalle variabili macroeconomiche e si ha

$$v_t \sim N(0, \Sigma),$$

dove con  $\Sigma$  denotiamo la matrice di varianza e covarianza delle innovazioni  $v_{jt}$ .

Le variabili macroeconomiche sono, a loro volta, descritte da un modello econometrico in genere autoregressivo.

Il modello così costruito, una volta calibrato sui dati di mercato, permette di stimare le probabilità di default per ciascuna posizione.

Per una descrizione dettagliata del modello ed ulteriori approfondimenti si rinvia ai lavori di Wilson [27][28].

## **6.5 Analisi comparata dei modelli**

Il confronto di questi modelli, su alcuni portafogli presi come benchmark di riferimento ha evidenziato che, pur portando a risultati diversi, tutti possono essere impiegati quali modelli interni per la determinazione del capitale regolamentare e per la determinazione del rischio di credito di portafogli costituiti da obbligazioni e prestiti.

Un aspetto comune a tutti gli approcci considerati è l'ipotesi che i tassi di interesse e le esposizioni siano grandezze deterministiche. Questa assunzione rende tali modelli del tutto inadeguati alla valutazione del rischio di credito nel caso di portafogli che contengano strumenti derivati.

In tutti i modelli considerati, inoltre, il rischio di credito viene analizzato in modo indipendente dal rischio di mercato. Questo determina una non accurata misurazione del rischio finanziario complessivo, dato che vengono ignorate le interazioni esistenti tra i due aspetti.

Per un confronto tra i diversi approcci presentati si veda anche [17].

## **7 Strumenti per la gestione del rischio di credito di un portafoglio**

In questo lavoro ci siamo occupati di introdurre alcune problematiche ed alcuni modelli inerenti alla valutazione del rischio di credito per un portafoglio finanziario. La quantificazione di tale rischio permette da un lato di determinare i requisiti patrimoniali di garanzia, ma fornisce anche informazioni rilevanti per i processi di gestione di tale rischio. Tra gli approcci tradizionali, e tuttora ampiamente utilizzati, per la gestione del rischio di credito vi sono i limiti sulle linee creditizie, le clausole di compensazione e le garanzie collaterali. Si tratta di misure che vanno ad agire principalmente sul rischio di credito associato ad una posizione o ad una controparte, senza considerare l'aggregazione delle singole posizioni a livello di portafoglio.

I limiti sulle linee di credito per ciascuna controparte hanno lo scopo di limitare l'ammontare dell'esposizione complessiva ed in genere dipendono dal merito creditizio della controparte stessa. Si tratta di misure che possono talvolta rivelarsi controproducente

portando al paradosso per cui vengono limitate le esposizioni nei confronti di clienti con rating elevato che abbiano già raggiunto elevate esposizioni, a favore di clienti con ratings inferiori ma esposizioni più basse.

Gli accordi di compensazione si possono avere quando vi sono più transazioni associate ad una medesima controparte. In caso di default prevedono l'aggregazione di tutte le esposizioni aperte con la controparte che ha dichiarato l'insolvenza e la loro compensazione con i pagamenti dovuti, permettendo di ridurre la perdita complessiva.

Un'ulteriore misura diretta a limitare le perdite è la richiesta di garanzie collaterali che, in caso di default, possono essere liquidate a parziale o a totale copertura della perdita verificatasi. Al fine di garantire l'adeguatezza della garanzia nel tempo, possono essere previste delle integrazioni (margin calls) legate alla variazione dell'esposizione. Un elemento critico nella valutazione dell'adeguatezza delle garanzie riguarda la correlazione tra l'esposizione e il valore delle garanzie stesse.

Tali metodologie, seppure utili e tuttora molto diffuse, si rivelano inadeguate sul piano di una efficiente gestione del rischio di credito per portafogli finanziari articolati poichè non considerano il contributo che ciascuna posizione/controparte apporta a livello aggregato.

Recentemente, anche sulla base degli Accordi di Basilea, molte istituzioni finanziarie hanno sviluppato metodologie quantitative via via più sofisticate per una corretta misurazione del rischio di credito anche a livello di portafoglio, e questo ha portato allo sviluppo, parallelamente ai modelli commerciali più noti, di numerosi modelli interni.

Inoltre l'apertura e lo sviluppo di mercati secondari per la negoziazione di prestiti e altre attività collegate agli affidamenti, l'introduzione e la diffusione di nuovi derivati sul credito e lo sviluppo di tecniche di cartolarizzazione (*securitisation*) hanno ampliato gli strumenti a disposizione per una gestione attiva del rischio di credito.

## Riferimenti bibliografici

- [1] Arvanitis A., Gregory J., Credit: the complete guide to pricing, hedging and risk management, Risk Books, Risk Waters Group, 2001.
- [2] Bluhm C., Overbeck L., Wagner C., Credit Risk Modeling, Chapman & Hall/CRC, 2001.
- [3] Cossin D., Pirotte H., Advanced Credit Risk Analysis, John Wiley & Sons, Ltd. 2002.

- [4] CreditMetrics, Technical Document, JP Morgan, 1997.
- [5] Credit Suisse, CreditRisk+: A Credit Risk Management Framework, Credit Suisse Financial Products, 1997.
- [6] Crouhy M., Galai D., Mark R., A comparative analysis of current credit risk models, *Journal of Banking and Finance*, 24, 59-117, 2000.
- [7] Drouet D., Kotz S., Correlation and dependence, Imperial College Press, 2001.
- [8] Duffie D., Singleton K.J., Simulating correlated defaults, Working Paper, GSB, Stanford University, 1998.
- [9] Duffie D., Singleton K., Credit Risk, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2003.
- [10] Embrechts P., McNeil A., Straumann D., Correlation and dependence in risk management, in *Risk Management: value at risk and beyond*, M.H. Dempster (editor), Cambridge University Press, 2001.
- [11] Frey R., Backhaus J., Interacting defaults and counterparty risk: a markovian approach, Working Paper, disponibile su [www. defaultrisk.com](http://www.defaultrisk.com), 2003.
- [12] Frey R., McNeil A., Dependent defaults in models of portfolio credit risk, *Journal of Risk*, 6, forthcoming.
- [13] Giesecke K., Credit risk modeling and valuation: an introduction, to appear in *Credit Risk: models and management, vol.2*, D. Shimko (editor), Riskbooks, 2004.
- [14] Giesecke K., A simple exponential model for dependent defaults, *Journal of Fixed Income*, 13, 74-83, 2003.
- [15] Giesecke K., Correlated default with incomplete information, *Journal of Banking and Finance*, 28, 1521-1545, 2004.
- [16] Giesecke K., Weber S., Cyclical correlations, credit contagion and portfolio losses, to appear in *Journal of Banking and Finance*.
- [17] Gordy M. B., A comparative anatomy of credit risk models, *Journal of Banking and Finance*, 24, 119-149, 2000.

- [18] Jarrow R., Yu F., Counterparty risk and the pricing of defaultable securities, *Journal of Finance*, 56(5), 555-576, 2001.
- [19] Kealhofer S., Bohn J., Portfolio management of default risk, KMV Technical document, 1993.
- [20] Crosbie P., Bohn J., Modeling default risk, KMV Technical document, 2003.
- [21] Lucas D.J., Default correlation and credit analysis, *Journal of Fixed Income*, 76-87, 1995.
- [22] Merton R., On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates, *Journal of Finance*, 29, 449-470, 1974.
- [23] Overbeck L., Schmidt W., Modeling default dependence with threshold models, Working Paper, disponibile su *www.defaultrisk.com*, 2003.
- [24] Rau-Bredow H., Credit portfolio modeling, marginal risk contributions and granularity adjustments, Working Paper, University of Wuerzburg, 2002.
- [25] Schonbucher P.J., Factor models for portfolio credit risk, Working Paper, University of Bonn, 2000.
- [26] Vasicek A. O., Credit Valuation, KMV Working Paper, 1984.
- [27] Wilson T, Portfolio credit risk I, *Risk* 10 (9), 1987.
- [28] Wilson T, Portfolio credit risk II, *Risk* 10 (10), 1997.